ОБ ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛНОЙ P-АДИЧЕСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Ф.М.МУХАМЕДОВ AND У.А.РОЗИКОВ

Аннотация. В работе для p-адической динамической системы $f(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}$ на множестве комплексных p-адических чилес $\mathbb{C}_p$, полностью описаны диски Зигеля и аттракторы таких систем.

1. Введение

p-адические числа впервые были введены немецким математиком К.Гензелем. После открытия p-адических чисел, они рассматривались как чисто математический объект исследования. Начиная с 1980-х годов различные модели, описанные на языке p-адического анализа, активно изучаются. Различные применения таких чисел к теоретической физике были предложены в работах [2]-[6], к квантовой механике - в [7], многим другим областям физики - в [8],[9].

Исследования в p-адической квантовой физике стимулировали изучение p-адических динамических систем (см., например, [10]-[13]). Некоторые шаги в этом направлении [10] показывают, что даже простые (мономиальные) дискретные динамические системы $f(x) = x^n$ над полями p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{C}_p$ имеют вполне комплексное поведение. Такое поведение существенно зависит от значения простого числа p. С изменением p аттракторы отображаются в диски Зигеля и обратно. Число циклов и их длины также зависят от p (см.[14]). В связи с этим возникает задача изучения возмущенных винамических систем вида $f_q(x) = x^n + q(x)$, где возмущение задается некоторым многочленим $q(x)$. В работах [21],[22] исследованы связи таких динамических систем с мономиальными системами. А также изучены периодические точки возмущенних систем. Эти исследования показывают, что поведение возмущенных систем отличны от обычного (мономиального) и поэтому изучение таких систем важно (см. также [1, 13]).Более общие исследования полиномиальных динамических систем проводились в [25]-[27], где изучены множества Джулия (Julia) и Фату таких систем. Эти исследования стимулируют изучения компонент множества Фату для полиномиальных динамических систем, которое содержит аттракторы и диски Зигеля (см. [26],[27],[29]). Поэтому, в [23] было изучено аттракторы и диски Зигеля более простой динамической системы вида $f(x) = x^3+ax^2$ над $\mathbb{Q}_p$ при всех возможных значениях параметра a. В настоящей работе будет рассматриваться обобшение выше сказанной системыб т.е. $g(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}$ над полем $\mathbb{C}_p$. Изучаются диски Зигеля и аттракторы такой системы. Заметим, что выбор вида обусловлен тем, что неподвижные точки функции $g(x)$ находятся в явном виде. Заметим, что наше исследование существенно основано на p-адическом анализе.

[1]Настоящий адрес (Ф.М.): Department of Comput. & Theor. Sci., Faculty of Sciences, IIUM, P.O. Box, 141, 25710, Kuantan, Pahang, Malaysia

2. Предварительные сведения

2.1. **p-адические числа.** Пусть $\mathbb{Q}_p$ поле p-адических чисел, которое является пополнением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по отношению p-адической нормы, определенный на $\mathbb{Q}$, здесь и далее p - фиксированное простое число. Эта норма определяется следующим образом. Каждое рациональное число $x \neq 0$ можно записать в виде $x = p^r \dfrac{n}{m}$, где n и m не делятся на p. Тогда p-адическая норма x равна $|x|_p = p^{-r}$.

Эта норма удовлетворяет сильному неравенству треугольника:

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Это свойство показывает неархимедовость нормы.

Из этого свойства непосредственно следуют следующие:

1) если $|x|_p \neq |y|_p$, то $|x - y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$;

2) если $|x|_p = |y|_p$, то $|x - y|_p \leq |x|_p$;

Поле $\mathbb{Q}_p$ не является алгебраически полным, поэтому через $\mathbb{Q}_p^a$ обозначается ее алгебраическое замыкание. В силу теоремы Крулла (см.[28, теорема 14.1, 14.2]) норма заданная в $\mathbb{Q}_p$ имеет единственное продолжение до $\mathbb{Q}_p^a$, которое тоже является неархимедовым. Заметим, что $\mathbb{Q}_p^a$ не является полным относительно этой нормы. Пополнение $\mathbb{Q}_p^a$ также является алгебраически полным (см. [28, теорема 17.1]), и оно обозначается через $\mathbb{C}_p$ и называется *полем комплексных p-адических чисел.*

Для любого $a \in \mathbb{C}_p$ и $r > 0$ обозначим

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p < r\}, \quad S_r(a) = \{x \in \mathbb{C}_p : |x - a|_p = r\}.$$

Доказательство следующих лемм можно найти в [10],[30].

Лемма 2.1. *Если $a \in S_1(0)$, то $S_1(0) \setminus U_1(a) \subset S_1(a)$.*

Лемма 2.2. *Пусть $C_n^k = n!/(k!(n-k)!), k \leq n$. Тогда $|C_n^k|_p \leq 1$.*

Обозначим $\Gamma^{(m)} = \{x \in \mathbb{C}_p : x^m = 1\},\ m \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma = \cup_{m=1}^{\infty} \Gamma^{(m)}, \quad \Gamma_m = \cup_{j=1}^{\infty} \Gamma^{(m^j)}, \quad \Gamma_u = \cup_{m:(m,p)=1}^{\infty} \Gamma_m.$$

Через $\theta_{j,k}$ $(j = \overline{1,k})$ обозначим k-тый корень из 1, причем $\theta_{1,k} = 1$.

Лемма 2.3. *Следующие утверждения верны:*

(1) *Пусть $y^n = a$, где $a = \theta_{j,n-1}$ для некоторого $j = \overline{1, n-1}$ и $y \neq a$. Если $(n,p) = 1$, то $y \in S_1(a)$.*

(2) *$\Gamma_u \subset S_1(1)$;*

(3) *$|C_{p^k}^j|_p \leq \frac{1}{p}$ для любого $j = \overline{1, p^k - 1}$;*

(4) *$\Gamma_p \subset U_1(1)$.*

Функция $f: U_r(a) \to \mathbb{C}_p$ называется *аналитической* , если ее можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x-a)^n, \quad f_n \in \mathbb{C}_p,$$

здесь сходимость понимается в смысле нормы на шаре $U_r(a)$. Более подробно об аналитических функциях можно найти в [31].

Основы p-адического анализа и p-адической математической физики даны в [8],[18].

2.2. **Динамические системы на $\mathbb{C}_p$.** В этом пункте мы напомним (см., например, [29],[31]) некоторые известные факты, относящиеся к динамической системе (f, U) на $\mathbb{C}_p$, где $f : x \in U \to f(x) \in U$ - аналитическая функция и $U = U_r(a)$ или $\mathbb{C}_p$.

Пусть $f : U \to U$ является аналитической функцией. Обозначим $f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}(x)$, где $x \in U$. Если $f(x_0) = x_0$, тогда x_0 называется *неподвижной точкой*. Неподвижная точка x_0 называется *притягивающей*, если существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех $y \in U(x_0)$ имеет место $\lim_{n\to\infty} f^n(y) = x_0$. Если x_0 - притягивающая точка, тогда *аттрактирующим бассейном* называется множество

$$A(x_0) = \{x \in \mathbb{C}_p : \ f^n(x) \to x_0, \ n \to \infty\}.$$

Пусть x_0 - неподвижная точка для функции $f(x)$. Говорят, что шар $U_r(x_0)$ (находящийся в U) будет *диском Зигеля*, если каждая сфера $S_\rho(x_0)$, $\rho < r$ является инвариантной сферой относительно $f(x)$, т.е. если $x \in S_\rho(x_0)$, то все итерации этой точки находятся в той же самой сфере, т.е. $f^n(x) \in S_\rho(x_0)$ для всех $n = 1, 2 \dots$. Объединение всех дисков Зигела с центром в точке x_0 называется *максимальным диском Зигеля* и оно обозначается как $SI(x_0)$.

Замечание.[10] В комплексной геометрии центр диска однозначно определяется диском, и различные неподвижные точки не могут иметь один и тот же диск Зигеля. В неархимедовом случае центр диска - это любая точка, принадлежащая этому диску. Поэтому в принципе различным неподвижным точкам может соответствовать один и тот же диск Зигеля, что делает неархимедовый случай отличным от обычного случая.

Пусть x_0 - неподвижная точка аналитической функции $f(x)$. Положим

$$\lambda = \frac{d}{dx} f(x_0).$$

Точка x_0 называется *аттрактирующей*, если $0 \le |\lambda|_p < 1$; *седловой*, если $|\lambda|_p = 1$ и *отталкивающей*, если $|\lambda|_p > 1$.

Теорема 2.4. [10] *Пусть x_0 - неподвижная точка аналитической функции $f : U \to U$. Тогда следующие утверждения верны:*

1 . *если x_0 аттрактирующая точка для f, то она является притягивающей для динамической системы (f, U). Если число $r > 0$ удовлетворяет неравенству*

$$q = \max_{1 \le n < \infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \right|_p r^{n-1} < 1 \tag{2.2}$$

и $U_r(x_0) \subset U$, то $U_r(x_0) \subset A(x_0)$;

2 . *если x_0 - седловая точка для f, то она является центром диска Зигеля. Если число $r > 0$ удовлетворяет неравенству*

$$s = \max_{2\leq n<\infty} \left|\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\right|_p r^{n-1} < 1 \tag{2.3}$$

и $U_r(x_0) \subset U$, то $U_r(x_0) \subset SI(x_0)$;

3. Динамическая система $f(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}$

В этом пункте рассмотрим аналитическую функцию $f : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$, определенную по формуле:

$$f(x) = x^{2n+1} + ax^{n+1}, \tag{3.1}$$

где $|a|_p < 1$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Далее будем предполагать, что $p \geq 3$. Используя теорему 2.4 докажем некоторые свойства для динамической системы (3.1).

Заметим, что неподвижными точками функции (3.1) являются $\{x_i\}_{i=\overline{1,2n}}$, где $x_i^n = c_+$, $i = \overline{1,n}$ и $x_j^n = c_-$, $j = \overline{n+1,2n}$, здесь

$$c_\pm = \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2+4}). \tag{3.2}$$

Далее через c будем обозначать либо c_-, либо c_+.

Лемма 3.1. *При $|a|_p < 1$ справедливо равенство $|c_\pm|_p = 1$.*

Доказательство. В силу $p \geq 3$, имеем $|4|_p = 1$, откуда из свойства 1) нормы $|\cdot|_p$ получим нужное равенство. □

Из леммы 3.1 в качестве следствия получим

Лемма 3.2. $\{x_j\}_{j=1}^{2n} \subset S_1(0)$.

Лемма 3.3. *Пусть $(2n+1, p) = 1$. Если $f(y) = x_j$ для некоторого $j = \overline{1,2n}$ и $y \neq x_j$, тогда $y \in S_1(x_j)$.*

Доказательство. Предположим, что $y \in U_1(x_j)$, тогда $y = x_j + \gamma$, где $|\gamma|_p < 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= |y^{2n+1} + ay^{n+1} - x_j^{2n+1} - ax_j^{n+1}|_p \\ &= \left|\sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^k \gamma^k x_j^{2n+1-k} + a\sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l \gamma^l x_j^{n+1-l}\right|_p \\ &= |\gamma|_p |(2n+1)x_j^{2n} + \Delta_1|_p = |\gamma|_p, \end{aligned}$$

где мы использовали $(2n+1,p) = 1$ и $|\Delta_1|_p < 1$. Отсюда следует, что $y \notin U_1(x_j)$. Значит, $|y|_p \geq 1$. Откуда $|y|_p^{2n+1} > |a|_p|y|_p^{n+1}$, так как $|a|_p < 1$. Из $|f(y)|_p = |x_j|_p = 1$ находим, что $|y|_p = 1$, следовательно, $y \in S_1(0) \setminus U_1(x_j)$. В силу леммы 2.1 имеем $y \in S_1(x_j)$. Лемма доказана. □

Теорема 3.4. *Следующие утверждения верны:*

(i) *Если $(2n+1,p) = 1$, тогда x_j - центр диска Зигеля и $SI(x_j) = U_1(x_j)$.*

(ii) *Пусть* $n = p^l$, $l = 1, 2, \ldots$ *Тогда* $SI(x_j) = U_1(c^{1/n})$ *для любого* $j = \overline{1, n}$.

Доказательство. (i) Заметим, что

$$|f'(x_j)|_p = |x_j^n|_p|(2n+1)x_j^n + a(n+1)|_p = 1$$

и

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_j)\right|_p &= \left|\frac{(2n+1)!}{m!(2n+1-m)!}x_j^{2n-m} + \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!m!}x_j^{n-m}\right|_p \\ &\leq \max\{|C_{2n+1}^m|_p, |C_{n+1}^m|_p\} \leq 1.\end{aligned}$$

Проверим условие теоремы 2.4:

$$q = \max_{1 \leq m < \infty}\left|\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_j)\right|_p r^{m-1} \leq r^{m-1}\max\{|C_{2n+1}^m|_p, |C_{n+1}^m|_p\} \leq 1.$$

Это неравенство выполняется, если выберем $r < 1$. Таким образом, в силу теоремы 2.4, неподвижная точка x_j является центром диска Зигеля. Следовательно, $U_r(x_j) \subset SI(x_j)$. Докажем теперь, что $f(S_1(x_j)) \neq S_1(x_j)$ для любого j. Пусть y такое, что $f(y) = x_j$, тогда в силу леммы 3.3 имеем $y \in S_1(x_j)$. Кроме того, $x_j \notin S_1(x_j)$. Следовательно, $f(y) \notin S_1(x_j)$. Утверждение (i) доказано.

(ii) Пусть $x_i^n = c$, т.е. $x_i^{p^l} = c$. Тогда $\left(\frac{x_i}{c^{1/n}}\right)^n = 1$, т.е. $\frac{x_i}{c^{1/n}} \in \Gamma_p$. В силу леммы 2.3, имеем $\Gamma_p \subset U_1(1)$. Следовательно, $x_i \in U_1(c^{1/n})$, так как $|c^{1/n}|_p = 1$. Ясно, что $x_i \in U_1(x_i)$. Откуда $U_1(x_i) = U_1(c^{1/n})$. В силу (i) получим $SI(x_i) = U_1(c^{1/n}), i = \overline{1, n}$. Теорема доказана. □

Лемма 3.5. *Если* $x^n = c$, $\ y^n = c$ *и* $x \neq y$, $(p, n) = 1$, *то* $|x - y|_p = 1$.

Доказательство. Предположим, что $|x - y|_p < 1$, то $x = y + \gamma$, $\ |\gamma|_p < 1$. Используя $|c|_p = |y|_p = 1$ и $|\sum_{k=2}^n C_n^k \gamma^{k-1} y^{n-k}|_p < 1$ получим

$$\begin{aligned}0 &= |x^n - y^n|_p = \left|\sum_{k=1}^n C_n^k \gamma^k y^{n-k}\right|_p \\ &= |\gamma|_p\left|ny^{n-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k \gamma^{k-1} y^{n-k}\right|_p = |\gamma|_p.\end{aligned}$$

Следовательно, $x = y$, что противоречить условию леммы. Лемма доказана. □

Лемма 3.6. *Пусть* $(2n+1, p) = 1$ *и* $(n, p) = 1$. *Тогда* $x_i \in S_1(c^{1/n})$ *и* $SI(x_i) \cap SI(x_j) = \emptyset$, $\ i, j = \overline{1, n}$, $\ i \neq j$.

Доказательство. Так как $x_i^n = c$, то $\frac{x_i}{c^{1/n}} \in \Gamma_u$. Из леммы 2.3 следует $\frac{x_i}{c^{1/n}} \in S_1(1)$. Отсюда $x_i \in S_1(c^{1/n})$, поскольку $|c^{1/n}|_p = 1$. В силу теоремы 3.4 (i), $SI(x_i) = U_1(x_i)$. Пусть $x_i \neq x_j$ и $y \in U_1(x_i)$, т.е. $|y - x_i|_p < 1$. Тогда, в силу леммы 3.5, $|y - x_j|_p = 1$, следовательно, $y \notin U_1(x_j)$. Таким образом, $SI(x_i) \cap SI(x_j) = \emptyset$, $\ i \neq j$. Лемма доказана. □

Лемма 3.7. *Пусть* $(n, p) \neq 1$, $\ n = p^k m$, $\ (m, p) = 1$ *и* $c_{ij} = \xi_i \eta_j$, $\xi_i \in \Gamma^{(m)}$, $\ \eta_j^{p^k} = c$, $\ i = \overline{0, m-1}$, $\ j = \overline{0, p^k - 1}$. *Тогда*

(i) $SI(c_{ij}) = U_1(c_{ij}) = SI(c_{il})$, $\ j, l = \overline{0, p^k - 1}, j \neq l$.

(ii) $SI(c_{ij}) \cap SI(c_{kl}) = \emptyset$, $\ k \neq l$.

Доказательство. (i) В этом случае легко видеть, что $(2n+1,p)=1$. Тогда, согласно теореме 3.4, имеем $SI(c_{ij})=U_1(c_{ij})$. Из условия леммы получим $\eta_i\in U_1(c^{1/p^k})$, откуда $\xi_i\eta_j\in U_1(\xi_i c^{1/p^k})$. С другой стороны, $c_{ij}=\xi_i\eta_j\in U_1(c_{ij})$ и следовательно, $U_1(c_{ij})=V_1(\xi_i c^{1/p^k})$, $\forall j=\overline{1,p^k-1}$.

(ii) В силу условия леммы $\xi_i\in\Gamma_u$, отсюда из леммы 2.3 получим $\xi_i\in S_1(1)$. Заметим, что $|\xi_i-\xi_j|_p=1$ (см. лемму 3.5) при $i\neq j$. Пусть $y\in U_1(c_{ij})$, тогда

$$|y-c_{ik}|_p=|y-c_{ik}+\eta_k(\xi_i-\xi_j)|_p=1.$$

Это означает, что $y\notin U_1(c_{jk})$. Следовательно, в силу (i), имеем

$$SI(c_{ij})\cap SI(c_{kl})=\emptyset,\quad k\neq l.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.8. *Если* $(2n+1,p)\neq 1$, $\ k\geq 1$, *тогда неподвижные точки являются аттрактирующими. Более того* $U_1(x_j)\subset A(x_j)$ *для любого* $j=\overline{1,2n}$.

Доказательство. Пусть $2n+1=p^k m$, $\ k\geq 1$ с $(m,p)=1$. Тогда имеем $|f'(x_j)|_p<1$. Следовательно, каждая неподвижная точка является аттрактирующим. Чтобы определить аттрактурующий бассейн мы используем условие (2.2) теоремы 2.4, которое имеет вид

$$q=\max_{1\leq n<\infty}\{|C^m_{2n+1}|_p,|C^m_{n+1}|_p\}r^{n-1}<1.$$

Если $r<1$, это условие выполняется. Таким образом, $U_1(x_j)\subset A(x_j)$. □

Лемма 3.9. *Если* $(2n+1,p)\neq 1$, *то*

$$\bigcup_{\xi\in\Gamma_m}U_1(x_i\xi)\subset A(x_i).$$

Доказательство. Пусть $2n+1=p^k m$, $\ (m,p)=1$. Рассмотрим $\xi\in\Gamma_{m^k}$, $\ y\in U_1(x_i\xi)$. Тогда $y=x_i\xi+\gamma$ и $|\gamma|_p<1$. Заметим, что

$$f^k(x+\gamma)=f(f^{k-1}(x+\gamma))=(x+\gamma)^{(2n+1)^k}+\Delta_\gamma.$$

В силу $|a|_p<1$, если $|y|_p=1$, то $|f^k(y)|_p=1$ для $\forall k\in N$. Таким образом, из $f^k(y)-(x_i\xi+\gamma)^{(2n+1)^k}=\Delta_\gamma$ следует $|\Delta_\gamma|_p<1$ для $\forall|\gamma|_p<1$. Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned}
|f^{(k)}(y)-x_i|_p &= |f^{(k)}(y)-f^{(k)}(x_i)|_p\\
&= |(x_i\xi+\gamma)^{(2n+1)^k}+\Delta_\gamma-x_i^{(2n+1)^k}-\Delta_0|_p\\
&= \left|\gamma\sum_{l=1}^{(2n+1)^k}C^l_{(2n+1)^k}\gamma^{l-1}(x_i\xi)^{(2n+1)^k-l}+\Delta_\gamma-\Delta_0\right|_p<1.
\end{aligned}$$

Следовательно, $f^k(y)\in U_1(x_i)\subset A(x_i)$. Откуда $U_1(x_i\xi)\subset A(x_i)$ и

$$\bigcup_{\xi\in\Gamma_m}U_1(x_i\xi)\subset A(x_i).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.10. *Если* $x^n=c_+$, $\ y^n=c_-$, *тогда* $|x-y|_p=1$.

Доказательство. Из определения $c_\pm$ (см. (3.2)) находим, что $|c_+ - c_-|_p = |\sqrt{a^2+4}|_p = 1$. Следовательно,

$$1 = |x^n - y^n| = |x-y|_p \left| \sum_{k=1}^{n-1} x^k y^{n-k} \right|_p \leq |x-y|_p \leq 1$$

Откуда $|x-y|_p = 1$. Здесь мы использовали, что $|x|_p = |y|_p = |c_\pm|_p = 1$. $\square$

Лемма 3.11. *Пусть $p \geq 3$, $(2n+1,p)=1$ и $(n,p)=1$. тогда*

$$SI(x_i) \cap SI(x_{n+j}) = \emptyset, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.6, но здесь используется лемма 3.10 вместо леммы 3.5. $\square$

Объединив полученные результаты этого пункта можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.12. *Следующие утверждения верны:*

(i) *Если $(2n+1,p)=1$, тогда x_j - центр диска Зигеля и $SI(x_j) = U_1(x_j)$, $j = \overline{1,2n}$.*

(ii) *Пусть $n = p^l, l \in \mathbb{N}$. Тогда $SI(x_j) = U_1(c_+^{1/n})$, $j = \overline{1,n}$ и $SI(x_j) = U_1(c_-^{1/n})$, $j = \overline{n+1,2n}$.*

(iii) *Пусть $(2n+1,p)=1$ и $(n,p)=1$. Тогда $x_i \in S_1(c_+^{1/n})$, $i = \overline{1,n}$ и $x_j \in S_1(c_-^{1/n})$, $j = \overline{n+1,2n}$. Более того, $SI(x_i) \cap SI(x_j) = \emptyset$ для любых $i,j = \overline{1,2n}$, $i \neq j$,.*

(iv) *Пусть $(n,p) \neq 1$, $n = p^k m$, $(m,p)=1$ и $c_{ij} = \xi_i \eta_j$, $\xi_i \in \Gamma^{(m)}$, $\eta_j^{p^k} = c$, $i = \overline{0,m-1}, j = \overline{0,p^k-1}$. Тогда $SI(c_{ij}) = U_1(c_{ij}) = SI(c_{il})$ при $l,j = \overline{0,p^k-1}$, $l \neq j$ и $SI(c_{ij}) \cap SI(c_{kl}) = \emptyset$, $k \neq i$.*

(v) *Если $(2n+1,p) \neq 1$, то*

$$\bigcup_{\xi \in \Gamma_m} U_1(x_i \xi) \subset A(x_i).$$

Благодарность. Авторы признательны профессорам И.В.Воловичу и А.Ю.Хренникову за внимание, полезные советы и замечания.

Список литературы

[1] V. Anashin, Ergodic Transformations in the Space of p-Adic Integers, In book: p-adic Mathematical Physics, AIP Conference Proceedings, Vol. 826, Melville, New York, 2006, pp. 3–24.

[2] Araf'eva I.Ya, Dragovich B., Frampton P.H. and Volovich I.V. Wave function of the universe and p-adic gravity.// Mod.Phys. Lett. A. 1991. V.6. P.4341-4358.

[3] P.G.O.Freund, and E.Witten, Adelic string ampletudes.// Phys. Lett. B. 1987. V.166. P.191-194.

[4] E.Marinary and G.Parisi, On the p-adic five point function.// Phys.Lett.B. 1988. V.203. P. 52-56.

[5] I.V.Volovich, Number theory as the ultimate physical theory, Preprint, TH, 4781/87.

[6] I.V.Volovich, p-adic strings.// Class. Quantum Grav. 1987. V.4. P.L83-L87.

[7] A.Yu.Khrennikov, p-adic quantum mechanics with p-adic valued functions. // J. Math. Phys. 1991. V.32. P. 932-936.

[8] V.S.Vladimirov and I.V.Volovich and E.I.Zelenov, p-adic Analysis and Mathematical Physics, World Scientific, 1994.

[9] A.Yu.Khrennikov, p-adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Kluwer AP. 1994.

[10] С.Албеверио, А.Хренников, Б.Тироззи, С.Де.Смит, p-адические динамические системы. //Теор. и матем. физика. 1998, T.114, N 3, c.349-365.

[11] Albeverio S., Khrennikov A. and Koloeden P.E. Memory retrieval as a p-adic dynamical system.// BioSys. 1999. V.49. P.105-115.

[12] D.Dubischer, V.M.Gundlach, A.Khrennikov and O.Steinkamp, Attractors of random dynamical system over p-adic numbers and a model of 'noisy' cognitive process. // Physica D. 1999. V.130. P.1-12.

[13] E.Thiran,D.Verstegen, J.Weyers. p-adic dynamics.// J.Stat. Phys. 1989. V.54. N.3/4. P.893-913.

[14] A.Yu.Khrennikov, M.Nilsson, On the number of cycles of p-adic dynamical system.// J.Number Theor. 2001. V.90. P. 255-264.

[15] V.M.Gundlach, A.Khrennikov and K.O.Lindahl, On ergodic behavior of p-adic dynamical systems.// Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2001. V.4. P.569-577.

[16] A.Yu.Khrennikov, Non-Archimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical systems and biological models. Kluwer AP, 1997.

[17] V.A.Avetisov, A.H. Bikulov, S.V.Kozyrev and V.A.Osipov, p-adic modls of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes.// J. Phys. A: Math.Gen. 2002. V.35. P.177-189.

[18] Н.Коблиц, p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1983.

[19] A.M.Robert, A course of p-adic analysis, Springer, New York, 2000.

[20] A.Escassut, Analytic elements in p-adic analysis, World Scientific, Singapore-New Jersey- London, 1995.

[21] A.Yu. Khrennikov, M. Nilsson, p-adic deterministic and random dynamical systems, Kluwer, Dordreht, 2004.

[22] A.Yu. Khrennikov, P.. Svensson, Attracting fixed points of polynomial dynamical systems in fields of p-adic numbers, // Izvestiya Math. 2007, V. 71, p. 103–114.

[23] F.M.Mukhamedov, J.F.F.Mendes, On the chaotic behavior of a generalized logistic p-adic dynamical system, // Jour. Diff. Eqs. 2007, V. 243, p. 125-145.

[24] F.M.Mukhamedov, U.A.Rozikov, On inhomogeneous p-adic Potts model on a Cayley tree,// Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2005. V.8. N.2. P. 277–290.

[25] R.L.Benedetto, p-adic dynamics and Sullivan's no wandering domains theorem.// Composito Math. 2000. V.122. p. 281–298.

[26] R.L.Benedetto, Preperiodic points of polynomials over global fields.// J. Reine Angew. Math. 2007, V. 608, p. 123–153.

[27] R.L.Benedetto, Wandering domains in non-Archimedean polynomial dynamics. .// Bull. Lond. Math. Soc. 2006, V. 38, No. 6, p. 937–950.

[28] D.Sullivan, Quasiconmormal homeomorphisms and dynamics, I., Solutions of the Fatou-Julia problem on wandering domains.// Ann. of Math. 1985. V.122, p. 401-418.

[29] L. Carleson, T. Gamelin, Complex dynamics. Springer- Verlag, New York, 1991.

[30] W. Schikhof, Ultrametric calculus. Cambridge Studies in Adv. Math. 4, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[31] H.-O.Peitgen, H.Jungers and D.Saupe, Chaos Fractals, Springer, Heidelberg-New York, 1992.

Ф.М.Мухамедов, Механико-математический факультет, Национальный Университет Узбекстана, Вузгородок, Ташкент, 100174, Узбекистан

E-mail address: far75m@yandex.ru, farrukh_m@iiu.edu.my

У.А.Розиков, Института математики и информационных технологий АНРУз, ул. Ф.Ходжаева,29, Ташкент, 100125, Узбекистан

E-mail address: rozikovu@yandex.ru